1 Классическое и квантовое состояние частицы и системы частиц. Пространство квантовых состояний как Гильбертово пространство. Скалярное произведение, модуль вектора состояний. Дираковский формализм.

Квантовое состояние – ~~вероятность~~ амплитуда попадания частицы в точку x ($P(x)$) в данное время t.

Классическое состояние – ее координаты и импульсы.

Квантовое состояние описывается с помощью волновой ф-ии $\psi(x,t)$. Если рассматривать зависимость только от координаты: пусть частица находится где-то на отрезке $[0;1]$. Рассмотрим вспомогательные ф-ии $|0\rangle$ и $|1\rangle$, а также примем, что $x=0$, если частица в левой половине отрезка, и $x=1$, если в правой. Ф-ия $|0\rangle$ равна 1 при $x=0$ и 0 при $x=1$ ($|1\rangle$ – наоборот). Тогда $\psi(x)$ единственным образом записывается в форме $\lambda_0|0\rangle + \lambda_1|1\rangle$ (такая частица называется кубитом).

$\psi = \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ \dots \\ \psi(x_n) \end{pmatrix}$ – квантовое состояние, где $\psi(x_i)$ – амплитуда нахождения ~~частицы~~ частицы в x_i.

Волновая ф-ия – это отображение $L \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, где L – пр-во состояний, и эта ф-ия нормированная ($\|f\| = 1 = \int |f(x)|^2 dx$)

Гильбертово пр-во – обобщение евклидова пр-ва на бесконечномерный случай (ЛП с введенным на нем скалярным произведением). Конечномерное ЛП над $\mathbb{C}$ со скалярным произведением – унитарное.

Пусть H_1, H_2 – Гильбертовы ЛП с базисами $\{e_1, \dots, e_k\}$ и $\{h_1, \dots, h_s\}$. Образуем пр-во $H_1 \otimes H_2$ с базисом $|e_i h_j\rangle$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,s}$. Если все базисы были ОНБ, то $H_1 \otimes H_2$ – Гильбертово пр-во с ОНБ. Тогда для описания ансамбля двух частиц можно сказать, что H_1 – пр-во состояний первой частицы, H_2 – второй. Пусть $\psi_1 \in H_1$, $\psi_2 \in H_2$, $\psi_1 = \lambda_0|0\rangle + \lambda_1|1\rangle$; $\psi_2 = \mu_0|0\rangle + \mu_1|1\rangle$; $\psi_1 \otimes \psi_2 = \lambda_0\mu_0|00\rangle + \lambda_0\mu_1|01\rangle + \lambda_1\mu_0|10\rangle + \lambda_1\mu_1|11\rangle$. Но не все состояния можно описать в виде тензорного произведения однокубитных состояний (например, $|00\rangle + |11\rangle$ нельзя).

Состояние физической системы описывается вектором Гильбертова пр-ва H единичной длины с ОНБ $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots$. Физический смысл базисных векторов – возможные значения какого-либо параметра, который можно измерить (координаты материальных точек, ...). Общий вид состояния системы: $|\xi\rangle = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ – амплитуды.

Скалярное произведение в ЛП L над $\mathbb{C}$ – ф-ия (x,y): $L \times L \to \mathbb{C}$, удовлетворяет условиям:

1) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y)$ – линейность по первому аргументу.
2) $(y, x) = \overline{(x, y)}$
3) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Пусть $a \in H$ – вектор из Гильбертова пр-ва состояний. Обозначим через $|a\rangle$ столбец его координат в заранее выбранном ОНБ $\{e_i\}$, через $\langle a|$ – строку, полученную из $|a\rangle$ эрмитовым сопряжением. Тогда можно рассматривать скалярное произведение векторов a и b, записав его в виде матричного произведения $\langle a|\cdot|b\rangle$; $\langle a|b\rangle = \sum_i \overline{\lambda_i^a}\, \lambda_i^b$. Перемножим по-другому и получим матрицу $|a\rangle\langle b|$.

$|a\rangle\langle a|$ – матрица плотности состояния $|a\rangle$, на ее главной диагонали – вероятности, $\Rightarrow$ ее след равен 1.

Модуль вектора состояний $|\xi\rangle = \sum \lambda_i |e_i\rangle$ равен $\sqrt{\langle\xi|\xi\rangle} = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2}$; т.к. λ_i – амплитуды, и в квадрате дают вероятность, то подкоренное выражение равно 1 $\Rightarrow$ модуль равен единице.

Дираковский формализм.

Сопряженным пр-вом ЛП V над полем $\mathbb{K}$ называется пр-во V^* его **линейных функционалов**, т.е. ф-ий $f: V \to \mathbb{K}$ таких, что $\forall x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ верно $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. $\dim V = \dim V^*$.

Сопряженный (эрмитово) к A оператор - оператор A^*: $\forall x, y \in H$ $(x, Ay) = (A^* x, y)$ (он единственен).

Пусть есть гильбертово ЛП V. Векторы из V - $|x\rangle$ (кет-векторы), из V^* - $\langle x|$ (бра-векторы). В конечномерном пространстве:

$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\langle x| = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Тогда $\langle x|y\rangle$ - скалярное произведение.

Если $|1\rangle, \dots, |n\rangle$ - ОНБ V, $\langle 1|, \dots, \langle n|$ - ОНБ V^*, то $M = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} |i\rangle\langle j|$ - линейный оператор. Матрица оператора M - $\|m_{ij}\|$.

$m_{ij} = \langle i|M|j\rangle = a_{ij}$. Диагональная матрица: $\sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$.

Тензорным произведением векторных пр-в V и W $(V \otimes W)$ над общим полем $\mathbb{K}$ называется векторное пр-во T вместе с билинейным отображением $\otimes$: $V \times W \to T$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$, удовл. следующему условию: если $e_i : i \in I$ и $f_j : j \in J$ - базисы V и W, то $e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J$ - базис пр-ва T.

$|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \Leftrightarrow |i_1\rangle|i_2\rangle \Leftrightarrow |i_1 i_2\rangle$.

2 Измерения как случайная величина. Правило Борна. Частичные измерения. Матрица плотности. Относительная матрица плотности и ее вычисление. Чистое и смешанное состояния.

Правило Борна.

При измерении состояния $|\psi\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{d_1,\dots d_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 \dots i_n\rangle$ в качестве ответа мы получаем строку "$i_1 \dots i_n$" с вероятностью $|a_{i_1,\dots i_n}|^2$, состояние системы при таком исходе перейдет в $|i_1,\dots i_n\rangle$.

Если рассмотреть ответ измерения ("$i_1 \dots i_n$") как число, результаты измерения можно считать случайной величиной:

Измерение частицы, находящейся в состоянии ψ, есть случайная величина, принимающая значения x_j, $j=\overline{1,n}$ с вероятностями $p_j = |\psi(x_j)|^2$, где $\psi = \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ \dots \\ \psi(x_n) \end{pmatrix}$ - квантовое состояние, $\psi(x_i)$ - амплитуда нахождения частицы в x_i.

Описанное выше измерение - измерение в вычислительном базисе. Если измерение в произвольном ОНБ, то измерение в этом базисе - случайная величина, принимающая значения $|x_j\rangle$ с вероятностями $|\langle\psi|x_j\rangle|^2$ (при этом $|\psi\rangle$ перейдет в $|x_j\rangle$).

Измерения общего вида: набор операторов $\{M_m\}$; вероятность получения результата m равна $p(m) = \langle\psi|M_m^* M_m|\psi\rangle$; после измерения система перейдет в состояние $|\psi_m\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}$; при этом $\sum_m M_m^* M = I$.

Проективные измерения: $\sum_m P_m = I$; $P_m^2 = P_m$. Если $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle$ - базис, то $P_m = |e_m\rangle\langle e_m|$, $p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle$; новое состояние системы - $\frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}$

Для непрерывного случая: $\psi(x)$ - состояние кв. частицы в непрерывном случае.
Правило Борна: $p(x) = |\psi(x)|^2$ - плотность вероятности нахождения частицы в т. x

Запутанное [redacted] состояние - состояние, которое нельзя представить в виде тензорного произведения состояний $\psi_1 \otimes \psi_2$ (например, $|00\rangle + |11\rangle$).
[redacted]

Для чистых состояний: равносильны утверждения • ρ - чистая • $\operatorname{rank}(\rho) = 1$ • $\rho^2 = \rho$ • $\operatorname{Tr}(\rho^2) = 1$.

Энтропия - мера хаоса; мера квантовой запутанности.

Рассмотрим состояние $|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle$. Будем измерять один из кубитов и смотреть, в каком состоянии находится другой.

Выполним измерение в вычислительном базисе. $M_0 = |0\rangle\langle 0|$, $M_1 = |1\rangle\langle 1|$.

$p(0) = \langle M_0\psi|M_0\psi\rangle = \langle\psi|M_0^* M_0|\psi\rangle = |a_{00}|^2 + |a_{01}|^2$; $|\psi_0\rangle = \frac{a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle}{\sqrt{|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2}}$, аналогично

$p(1) = |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2$; $|\psi_1\rangle = \frac{a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle}{\sqrt{|a_{10}|^2 + |a_{11}|^2}}$; оба этих состояния - запутанные, т.к. $|\psi_0\rangle \overset{\text{нет}}{=} \frac{|0\rangle}{\sqrt{}}(a_{00}|0\rangle + a_{01}|1\rangle)$, $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{}}|1\rangle(a_{10}|0\rangle + a_{11}|1\rangle)$.

Аналогично если измеряем второй кубит: $|0\rangle_2 \to$ сост. перейдет в $a_{00}|00\rangle + a_{10}|10\rangle = \underbrace{(a_{00}|0\rangle + a_{10}|1\rangle)}_{|\psi_0\rangle} \otimes |0\rangle$; $|1\rangle_2 \to$ сост. перейдет в $\underbrace{(a_{01}|0\rangle + a_{11}|1\rangle)}_{|\psi_1\rangle} \otimes |1\rangle$.

Пусть ψ незапутана: $|\psi\rangle = (\lambda_0|0\rangle + \lambda_1|1\rangle) \otimes (\mu_0|0\rangle + \mu_1|1\rangle)$. Тогда $|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle = \lambda_0|0\rangle + \lambda_1|1\rangle$.
$\Rightarrow$ измерение одного кубита не влияет на состояние второго.

Если состояние одного кубита не меняется при измерении другого, то они незапутаны.

$|\psi_0\rangle = |0\rangle$, $|\psi_1\rangle = |1\rangle$, $p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/2$ - смешанное состояние. (если $|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle$, то незапутанное)

это не совсем по билету

на квантовый; её квант. – энтр. фон Неймана

Шенноновская энтропия: $n = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i = Sh(\bar{p})$ – для распределения $\bar{p}$ (p_i – вероятность события i). Она достигает максимума, когда все события равновероятны. n – пропускная способность канала.

Alice $\xrightarrow[p_1 \dots p_m]{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ Bob 2^n возможных посланий; $p = 2^{-n}$ – равновероятность

$n = n(p_1, \dots, p_m)$. $\Delta t = \frac{1}{p_i}$ – среднее время ожидания.

$\log_2 \frac{1}{p_i}$ – кол-во доп. инф-ии, которое можно передать, если есть 1 символ.

Пример 1 $m = 1$; α_1 с $p_1 = 1 \Rightarrow Sh = -1 \log_2 1 = 0$

Пример 2 α_1, α_2; $p_1 = p_2 = 1/2 \Rightarrow Sh = 1$.

Пример 3 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $p_1 = 1/2$, $p_2 = p_3 = 1/4$: $\frac{1}{2}\log 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\log 4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Если $m = 2^k$, то $Sh = m \cdot \frac{1}{m} \log \frac{1}{p} = k$ (равновероятностные)

Состояние можно охарактеризовать **матрицей плотности** ρ. Для **чистого состояния**: $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, для **смешанного**: если $|\psi\rangle$ представляет из себя смесь состояний $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_k\rangle$ с вероятностями $p_1, \dots, p_k$, то

$\rho = \sum_{i=1}^{k} p_i \rho_{\psi_i} = \sum_{i=1}^{k} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$; $\sum p_i = 1$

Матрицы: $\rho_\psi \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\rho \to \begin{pmatrix} p_1 & & & \Theta \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Theta & & & p_k \end{pmatrix}$

Энтропия диагональной этой матрицы: $Sh(diag) = -\sum p_i \log_2 p_i \to$

$E(\rho) = -tr(\rho \log \rho)$ – мера хаоса смеси через матрицу плотности. Для чистого состояния $E(\rho) = 0$ (верно и обратное). Энтропию можно также понимать как меру незнания истинного квантового состояния. Аналог в квантовом случае – энтропия фон Неймана: $H_{vN}(\rho) = -tr(\rho \log_2 \rho)$.

Еще примеры запутанных состояний: $|GHZ\rangle = \lambda_1|1\dots1\rangle + \lambda_2|2\dots2\rangle + \dots + \lambda_k|k\dots k\rangle$

$|W\rangle = \lambda_1|100\dots0\rangle + \lambda_2|010\dots0\rangle + \dots + \lambda_k|00\dots1\rangle$

Измерения для матриц плотности: $p(m) = Tr(M_m^\dagger M_m \rho)$; $\rho \to \rho_m = \frac{M_m \rho M_m}{p_m}$

Редуцированная матрица плотности. С помощью нее можно описывать состояния подсистем составных квантовых систем.

$Tr\,\psi(\rho) = \sum \langle i|\rho|i\rangle$, частичный след $Tr_A(\rho_{AB}) = \sum_i \langle i|_A \rho_{AB} |i\rangle_A$. Матрицы $\rho_B = Tr_A \rho_{AB}$ и $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$ называются редуцированными матрицами плотности.

Матричная форма (для больших размерностей):

$$M = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \\ i'_1,\dots,i'_m}} a_{i_1\dots i_m i'_1\dots i'_m} |i_1\rangle_{H_1} \dots |i_m\rangle_{H_m} \langle i'_1|_{H_1} \dots \langle i'_m|_{H_m} \Rightarrow Tr_{H_k}(M) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \\ i_1=i'_1}} a_{i_1\dots i_m i'_1\dots i'_m} |i_1\rangle \dots |i_m\rangle \langle i'_1| \dots \langle i'_m|$$

(из первого подпр-ва)

Для того, чтобы узнать, в каком состоянии находится первая часть системы, нужно взять частичный след по всему, кроме этого подпр-ва.

Чтобы узнать частичный след по нескольким частицам, можно вычислить его сначала по одной, потом по второй.

Свойства матрицы плотности: (Андрей считает, это знать обязательно, как и определение волновой ф-ии).

1. Положительно определенная
2. $Tr\,\rho = 1$

Напомни: **волновая ф-ия** $\xrightarrow{f(x)}$ – отображение из пространства состояний в $\mathbb{C}$; норма $\|f(x)\| = 1$. Если спрашивают, что есть пр-во состояний – можно ответить, что это $\mathbb{R}^n$

3 Уравнение Шредингера. Общее решение. Унитарная эволюция как комплексная экспонента, ее выражение через собственные ф-ии и собственные значения оператора энергии (Гамильтониан). Решение уравнения Шредингера для бесконечной потенциальной ямы и для одного кубита. Уравнение Шредингера и его общее решение для матрицы плотности.

Динамика волновой ф-ии в случае изолированной системы описывается ур-ем Шредингера, в случае контакта с окружением — измерениями волновой ф-ии. (измерение в данном базисе пр-ве волновых ф-ий – случайная величина, принимающая значения векторов базиса с плотностью вероятности, задаваемой правилом Борна).

Ур-е Шредингера: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ или $i\hbar |\dot{\psi}\rangle = H|\psi\rangle$

(через оператор импульса $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$: $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ → потенциальная энергия)

H - гамильтониан, оператор энергии частицы (или системы частиц). Рассматриваем случай постоянства потенциальной энергии. Для решения ур-я Шредингера решить задачу Штурма - Лиувилля. Диагонализация гамильтониана автоматически решает ур-е Шредингера. Гамильтониан эрмитов ($H^* = H$)

Собств. векторы H: $|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle, \dots, |\Phi_{N-1}\rangle$; собств. знач. H: $E_0 \le E_1 \le \dots \le E_{N-1}$ (ам. ч-ий, возбужд. сост.)

собств. ф-ии и знач. для оператора импульса $\hat{p}$:

$\hat{p}\varphi = \lambda\varphi$; $\frac{\hbar}{i}\frac{d\varphi}{\varphi} = \lambda dx$; $\frac{\hbar}{i}\ln\varphi = \lambda x$; $\ln\varphi = \frac{\lambda i}{\hbar}x$; $\varphi = ce^{\frac{\lambda i}{\hbar}x}$ - с. ф-ии

собственные значения - любые, которые может принимать физическая величина (импульс).

Унитарная эволюция $|f(t)\rangle = U_t|f(0)\rangle$, где $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

т.е. $|\psi\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle$.

Теорема U - унитарная $\Leftrightarrow \exists H$ - эрмитов: $U = e^{iH}$

док-во: Собств. знач. унитарной матрицы по модулю равны единице. $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{i\varphi}$. U можно представить как $U_1^+ D U_1$, где U_1 - унитарная, D - диагональная, из собств. значений U (диагональная матрица собственных знач.)

$U = U_1^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} U_1 = U_1^* \operatorname{diag}(e^{i\varphi_0}, \dots, e^{i\varphi_n}) U = e^{iH}$, $H = U_1^* \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots \varphi_n) U_1$ → эрмитова

(у эрмитова оператора в диаг. форме на диаг. вещественные числа)

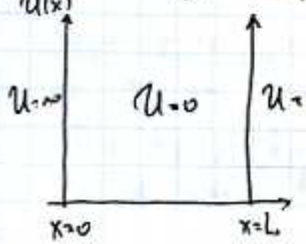
Если у H указанные выше собств. вект. и знач., то у $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ - те же самые собств. вектора, а собств. знач. – $e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}$.

Волновая ф-ия в момент времени 0: $|\psi(0)\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i |\Phi_i\rangle$; $\lambda_i = \langle\psi(0)|\Phi_i\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j e^{-\frac{i}{\hbar}E_j t}|\Phi_j\rangle$ - это реш. ур-я Шредингера

Общее решение ур-я Шредингера: $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(x,0)$

Решение ур-я Шредингера для бесконечной потенциальной ямы (стацион., $\hbar = 1$)



$i\hbar|\dot{\psi}\rangle = H|\psi\rangle$; $i|\dot{\psi}\rangle = \frac{\hat{p}^2}{2m}|\psi\rangle$; $H|\varphi_i\rangle = E_i|\varphi_i\rangle$; $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$\frac{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{2m}|\varphi_i\rangle = E_i|\varphi_i\rangle$; $-\frac{y''}{2m} - E_i y = 0$; $|\psi(0)\rangle = 0$; $|\psi(l)\rangle = 0$

Если $\hbar \neq 1$: $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$; $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$; $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Из границ $\Rightarrow A\sin kL = 0$, $kL = \pi n \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$; $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$

Ур-е Шредингера для матрицы плотности

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ $\quad i\hbar|\dot\psi\rangle = H|\psi\rangle$; $|\dot\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi\rangle$

$-i\hbar\langle\dot\psi| = \langle\psi|H$, $\langle\dot\psi| = -\frac{i}{\hbar}\langle\psi|H$

Дифференцируем ρ: $\dot\rho = |\dot\psi\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot\psi| = -\frac{i}{\hbar}H|\psi\rangle\langle\psi| - \frac{i}{\hbar}|\psi\rangle\langle\psi|H =$

$= -\frac{i}{\hbar}(H\rho - \rho H) = -\frac{i}{\hbar}[H\rho]$ $\Rightarrow$ ур-е имеет вид $i\hbar\dot\rho = [H\rho]$

↳ ковариация матриц H и ρ

Ур-е Шредингера для одного кубита

$|\psi\rangle = \lambda_0|0\rangle + \lambda_1|1\rangle$; $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$; $U_t : |\psi(0)\rangle \to |\psi(t)\rangle$

Матрицы Паули: $(\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1)$ $\sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Через линейную комбинацию $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и I можно выразить любую эрмитову матрицу 2×2 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, I$ - базис пр-ва эрмитовых матриц 2×2)

$\Rightarrow$ Гамильтониан для одного кубита выражается через их лин. комб..

$e^{it\sigma_i} = I\cos t + i\sigma_j \sin t$ (для степеней : $\sigma^{2n} = I$, $\sigma_i^{2n+1} = \sigma_j$)

$e^{it\sigma_x} = \cos t + i\sigma_z \sin t$

Общее решение ур-я Шредингера для матрицы плотности:

$\rho(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\rho(0)e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$

H имеет в базисе $|\varphi_j\rangle$ вид $\begin{bmatrix} E_0 & & \Theta \\ & E_1 & \\ & & \ddots \\ \Theta & & E_{N-1} \end{bmatrix}$

Физ.смысл:

Собственное значение - реальная физическая величина, которая достигается в состоянии, равном соответствующему собственному вектору.

Еще Андрей спрашивает про наблюдаемую

4 Связь эрмитовых и унитарных операторов, их диагонализация. Физические величины как собственные значения эрмитовых операторов. Операторы координаты, импульса, энергии и их собственные функции, собственные значения. Преобразование Фурье как оператор перехода от координатного базиса в гильбертовом пространстве состояний к импульсному базису. Коммутативность операторов как условие возможности одновременного измерения величин с абсолютной точностью. Соотношение неопределенности Бора - Гейзенберга.

Оператор U - <u>унитарный</u>, если $U^*U = I$.
Свойства:
1) U сохраняет длины векторов и углы между ними (т.к. $(x,y) = (Ux, Uy)$)
2) U переводит один ОНБ в другой ($(Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$)
3) Собственные значения U по модулю равны 1 ($(x,x) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x,x)$)
4) $|\det U| = 1$
5) Столбцы (строки) U образуют ОНБ

Оператор H - <u>эрмитов</u>, если $H^* = H$.
Свойства:
1) Собственные значения H вещественны ($(Ax, x) = \lambda(x,x) = \bar{\lambda}(x,x) = (x, Ax)$)
2) Эрмитовы матрицы имеют ОНБ из собственных векторов
3) Спектральное разложение

<u>Разложение</u>
для $\forall H$ $\exists$ разложение $H = UDU^*$, U со столбцами из собств. векторов, в D на диагонали - собственные значения. Это <u>спектральное разложение</u>.
Для всяких унитарной матрицы U $\exists$ унит. матрица V, что V^*UV - диагональная (диагонализация: для λ_1 ищем с.в. x_1, принимаем его за новый базисный, дополняем остальные векторы нового ОНБ. Матрица перехода от ОНБ к ОНБ - унитарная V_1. $\Rightarrow U_1 = V_1^* U V_1$ - унитарная. И т.д., получим $U_n = V_n^* \dots V_1^* U V_1 \dots V_n = V^*UV$, т.к. произв. унит. матриц есть унитарная матрица)

<u>Связь U и H</u>
- Пусть H - эрмитова. Тогда $U = e^{iH}$ - унитарная.
док-во: $H = UDU^*$; $\exp(iH) = U\,\mathrm{diag}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_n})U^* = UDU^*$; тогда $D^* = \mathrm{diag}(e^{-i\lambda_1}, \dots, e^{-i\lambda_n}) \Rightarrow DD^* = D^*D = I \Rightarrow D$ - унитарная. Произведение унит. матриц - унитарная матрица ($AA^* = A^*A = I$; $BB^* = B^*B = I$; $AB(AB)^* = ABB^*A^* = AA^* = I \Rightarrow$ верно); значит, $\exp(iH)$ - унитарная.
- Пусть U - унитарная. Тогда $\exists$ H - эрмитова такая, что $U = e^{iH}$.
док-во: собств. значения U по модулю равны 1, т.е. $|\lambda_i| = 1 \Leftrightarrow \lambda_j = e^{i\varphi_j}$. По диагонализации: каждая U может быть представлена в виде $V^{-1}\,\mathrm{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots)V$, где V - унитарная. Но это равно e^{iH}, где $H = V^*\,\mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)V$ - эрмитова.

Классическим величинам в квантовой теории соответствуют операторы.
- Величине <u>коорд-ты</u> x соответствует оператор умножения на эту координату: $\hat{x} : f(x) \to x f(x)$
- <u>Импульсу</u> p_x вдоль коорд. оси x - оператор импульса $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, полному импульсу $\hat{p}$ - оператор $\frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- <u>Энергии</u> соотв. оператор $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ (потенциальная энергия). Это Гамильтониан.

<u>Оператор координаты</u>
$\hat{x} : |\psi\rangle \to x \cdot |\psi\rangle$. Поиск собств. значений и собств. векторов:
$\hat{x}\varphi = \lambda\varphi$; $(\hat{x} - \lambda)\varphi = 0$; $\varphi = \begin{cases} \infty, & x = \lambda \\ 0, & x \neq \lambda \end{cases}$ - это δ-ф-ия.
Собств. знач.: вся действительная ось
Собств. ф-ии: дельта-функции

Оператор импульса.

$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$

$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \varphi = \lambda \varphi$; $\frac{\hbar\, d\varphi}{i\varphi} = \lambda dx$; $\frac{\hbar}{i} \ln \varphi = \lambda x$; $\ln \varphi = \frac{\lambda i}{\hbar} x$; $\varphi = Ce^{\frac{\lambda i}{\hbar} x}$

Собств. знач.: любые, которые может принимать физ. величина (импульс)

Собств. ф-ии: $\varphi = Ce^{\frac{\lambda i}{\hbar} x}$.

Оператор энергии (Гамильтониан)

$H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ (потенциал не меняется)

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = \lambda \varphi \cdot \left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right)$; $\varphi = A\sin kx + B\cos kx$

Собств. ф-ии: $\varphi = A\cos\sqrt{\frac{2m\lambda}{\hbar^2}}\, x + B\sin\sqrt{\frac{2m\lambda}{\hbar^2}}\, x$

Преобразование Фурье

Преобр. Фурье для волновой ф-ии наз. импульсным представлением волновой ф-ии:

$\varphi(p) = \int_R e^{\frac{-ipx}{\hbar}} \psi(x)\, dx$, обратный оператор: $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_R e^{\frac{ipx}{\hbar}} \psi(p)\, dp$

$e^{ip_1 x}, \dots, e^{ip_n x}$ - импульсный базис; $\delta_{\lambda_1}, \dots, \delta_{\lambda_n}$ - координатный базис

Один базис разложим по другому базису. Получим обратное преобр. Фурье:

$e^{ipx} = \int \delta_\lambda(p) e^{i\lambda x} d\lambda = \int \delta_p(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$ - это $F^{-1}: \varphi(p) \to f(x)$

$F: f(x) \to \varphi(p) = \int f(x) e^{-ipx} dx$ - преобр. Фурье

Коммутативность

$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$, т.к. $[\hat{x}, \hat{p}]\psi(x) = -xi\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) - \left(-i\hbar \frac{d}{dx}(\psi(x)x)\right) =$

$= -xi\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) + xi\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) + \psi(x) i\hbar \frac{d}{dx} x = i\hbar\psi(x)$

Для того, чтобы X и P (физ. величины) могли бы иметь определенные значения в некотором состоянии, описываемом волновой ф-ией $\psi(x)$, она должна быть собственной ф-ией операторов $\hat{x}$ и $\hat{P}$, т.е. $\hat{P}\psi(x) = p\psi(x)$, $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$. Тогда:

$\left.\begin{aligned} \hat{x}\hat{P}\psi(x) &= \hat{x} p\psi(x) = p\hat{x}\psi(x) = px\psi(x) \\ \hat{P}\hat{x}\psi(x) &= \hat{P} x\psi(x) = x\hat{P}\psi(x) = xp\psi(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi(x)(\hat{x}\hat{P} - \hat{P}\hat{x}) = 0$

$\Rightarrow$ Для того, чтобы 2 величины одновременно имели определенные значения, описывающие их операторы должны коммутировать

Неопределенность Бора - Гейзенберга

$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle_\psi - \langle x\rangle_\psi^2}$, $\langle x\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$

$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$, σ - среднеквадратическое отклонение; $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\langle\psi|\hat{P}\hat{x}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{x}\hat{P}|\psi\rangle =$

$= |\langle\hat{x}\psi|\hat{P}\psi\rangle|^2 \leq |\langle\hat{P}\psi|\hat{P}\psi\rangle||\langle\hat{x}\psi|\hat{x}\psi\rangle| \leq \|\hat{P}\psi\|^2 \|\hat{x}\psi\|^2$ (по КБШ)

$\Rightarrow \frac{1}{4}|\langle\psi|\hat{P}\hat{x} - \hat{x}\hat{P}|\psi\rangle|^2 \leq \|\hat{P}\psi\|^2 \|\hat{x}\psi\|^2 \Rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{P}, \hat{x}]\psi\rangle| = \frac{\hbar}{2}$

5

Тензорное произведение пространств, состояний и операторов. Формула для тензорного произведения двух матриц. Запутанное и незапутанное состояния. Запутывающие и не запутывающие операторы. Операторы NOT, CNOT, SWAP и однокубитные. Матрицы Паули и их свойства (собств. числа, функции и коммутация).

Тензорным произведением пространств $V \otimes W$ над общим полем K называется векторное пр-во T и операция $\otimes: V \times W \to T$; $(x, y) \mapsto x \otimes y$, такие, что $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис T, если $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ - базисы V и W. ($T = L(e_i \otimes f_j)$)

Тензорное произведение операторов: пр-ва V, W над полем K с базисами $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$. Тенз. произв. операторов $A: V \to V$ и $B: W \to W$ наз. ЛО $A \otimes B$: $V \otimes W \to V \otimes W$, определенный на базисных векторах так: $(A \otimes B)(e_i \otimes f_j) = (Ae_i) \otimes (Bf_j)$.

Базисные состояния двух кубитов: $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$; $|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$; $|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$; $|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$; т.е. $|\psi\rangle = \sum_{i=0,1;\ j=0,1} a_{ij} |ij\rangle$.

Тензор. произв. состояний:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \in h_1 \\ \psi_2 &= \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i f_i \in h_2 \end{aligned}\right] \quad \psi_1 \otimes \psi_2 = \sum_{\substack{j=1,n \\ i=1,\ell}} \lambda_j \mu_i (e_j \otimes f_i)$$

Если кубиты из H_1 и H_2 запутаны, и применяется что-то к кубиту, то ρ_{H_1} изменяется

Для матриц: $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$; $A: m \times n$; $B: p \times q$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$tr(A \otimes B) = tr A \cdot tr B$$

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^q (\det B)^m$$

Запутанное состояние - состояние, которое нельзя представить в виде тензорного произведения состояний $\psi_1 \otimes \psi_2$ (например, $|00\rangle + |11\rangle$).

Для чистых состояний равносильны утверждения:

Энтропия - мера квантовой запутанности

Критерий запутанности: $|\psi\rangle$ - чистое двухчаст. сост.; $|\psi\rangle = \sum\sum a_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B$, $A = \{a_{ij}\}$. Тогда $|\psi\rangle$ запутано $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A > 1$; двухчаст. сост. зап. $\Leftrightarrow \exists U_A, U_B: U_A \otimes U_B |\psi\rangle \neq |0\rangle$

Для смешанных состояний: в виде тенз. произведений, т.е. $\rho = \sum_i \omega_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$, $\rho_i^A = Tr_B$, $\rho_i^B = Tr_A$

Общий вид однокубитного гейта: $U_t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} e^{i\varphi}$

cSIGN - запутывающий

$$NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} |0\rangle &\to |1\rangle \\ |1\rangle &\to |0\rangle \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} |00\rangle &\to |11\rangle \\ |01\rangle &\to |10\rangle \\ |10\rangle &\to |01\rangle \\ |11\rangle &\to |00\rangle \end{aligned}$$

$|x, y\rangle \to |x, y \oplus x\rangle$

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CNOT: $|a, b\rangle \to |a, a \oplus b\rangle$

$|x, y\rangle \to |y, x\rangle$

$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(CNOT)^2 = I$

Запутывающий

Разложение Шмидта.

Пусть $|\psi\rangle$ – чистое, $|\psi\rangle \in A \otimes B$. Тогда $\exists$ ОНБ в A и B $\{|\alpha_i\rangle\}$ и $\{|\beta_i\rangle\}$, такие, что $|\psi\rangle = \sum_i^{\min(n,m)} \lambda_i |\alpha_i\rangle|\beta_i\rangle$, λ_i – коэфф. по Шмидту, сингулярные числа ($|\psi\rangle = \sum\sum a_{ij}|i\rangle_A|j\rangle_B$, $M = \{a_{ij}\}$, λ_i – ее сингул. числа, $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} s_i |\tilde{i}\rangle_A |\tilde{i}\rangle_B$,
$M = USV^* = U\left(\sum_{i=1}^{d} s_i |i\rangle_A \langle i|_B\right)V^* = \sum s_i |\tilde{i}\rangle_A \langle \tilde{i}|_B$), $\sum \lambda_i^2 = 1$, $\lambda_i \geq 0$

Если оператор U можно представить в виде $U_{H_1} \otimes U_{H_2}$, то он <u>неперепутывающий</u>, а [illegible] (иногда, видимо)

Матрицы Паули.

$\sigma_x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_z^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; они эрмитовы

У каждой собств. значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$. Нормированные собств. векторы:

$\psi_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\psi_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\psi_y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$; $\psi_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\psi_z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\psi_z^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$

$h(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, I)$ – пр-во всех эрмитовых матриц 2×2

$tr(\sigma_i) = 0$, $\det(\sigma_i) = -1$

Коммутация:

$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$
$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$
$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$

$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$
$[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$
$[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$

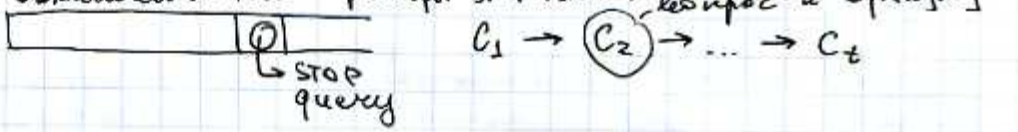
символ Леви-Чивиты

$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c$

$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{при } abc = 123, 231, 312 \text{ (четные перестановки)} \\ -1 & \text{при } abc = 213, 132, 321 \text{ (нечетные)} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

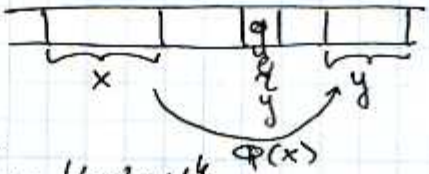
6 Классические алгоритмы с оракулом. Вычисление и сложность вычисления с оракулом. P и NP задачи.

$\Phi = \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$; есть решатель с вопросом к оракулу:



Сложность вычисления с оракулом есть число обращений к этому оракулу.

Оракул - ф-ия $\Phi: x \to y$



Кв. алгоритм M вычисляет ф-ию F с вероятностью $P > 0$ если $\forall x \in \{0,1\}^k$ измерения $\psi_{t,q}$ дает $F(x)$ с вероятностью не меньше P, где $|\psi_{t,q}\rangle$ - конечное состояние квантового вычисления по алгоритму A1 с нач. сост. $C_0 \otimes \psi_0$.

P-задачи - задачи, решаемые за полиномиальное (в зависимости от входа) время. (Примеры: задача о взаимно простых числах, о пути в графе, ...)
Плохо распараллеливаются.

NP-задачи - (non-deterministic polynomial) - решение которых можно проверить на машине Тьюринга за время, не превосх. полинома от входных данных; или: задачи, которые можно решить за полиномиальное время на недетерминированной машине Тьюринга.

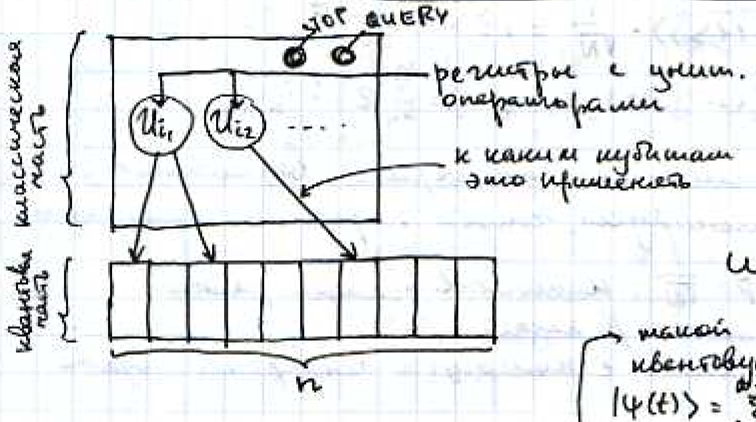
SAT-проблема: задана булевская формула Φ; определить, является ли она выполнимой (может ли $\Phi = 1$). Это переборная проблема. Она NP-полна и является самой трудной из переборных задач.

Проблема перебора в формулировке черного ящика: $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, f-черный ящик; выполнить: найти x такой, что $f(x) = 1$.

На классическом компьютере $\Omega(N) = t_{cl}$ - время, за которое задача решается; $t \geq c \cdot N$, $N = 2^n$ (т.е. нельзя решить быстрее, чем за 2^n операций - прямой перебор).

GSMP-проблема (Generalized Semi-Markov Processes) - тоже P-задача.

7 Общая схема квантового компьютера. Квантовый алгоритм. Квантовый оракул. Квантовые вычисления с оракулом и его сложность. Операторы отражения I_a. Реализация I_γ и $I_{x_{tor}}$. Алгоритм Гровера. Квантовый параллелизм. Решение задачи перебора. Случаи одного, нескольких и неизвестного числа решений.



Состояние классической части C_i однозначно определяет оператор $\omega(C_i): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (унитарность)

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^n}$ – гильбертово пр-во

$$\omega = U_{i_1} \otimes I \otimes U_{i_2} \otimes \dots \text{ (если } U_{i_1} \text{ к } 1 \text{ и } 2, \; U_{i_2} \text{ к } 4, \dots)$$

→ такой классический алгоритм индуцирует квантовую унитарную эволюцию его квантовой части вида $|\psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j(t)|j\rangle$, т.е. сводится к изменению во времени амплитуд базисных состояний

<u>Квантовый алгоритм</u> – классический алгоритм, определяющий эволюцию классической части компьютера (каким образом чередуются во времени операторы U_{i_k}).

Классическая эволюция: $C_1 \to C_2 \to \dots \to C_t$

Для квантовой части: $\psi_0 \xrightarrow{\omega(C_1)} \psi_1 \xrightarrow{\omega(C_2)} \psi_2 \to \dots \to \psi_t$

<u>Квантовые вычисления</u> – совместная эволюция двух частей компьютера; в конце вычисления – измерить состояние квантовой части $|e_i\rangle$.

<u>SAT-проблема</u> $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, f – черный ящик; выполнить: найти $x: f(x) = 1$

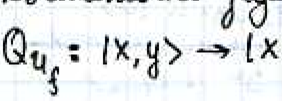
На квантовом компьютере <u>сложность</u>: $t_q = \lceil \frac{\pi}{4}\sqrt{N} \rceil$ – число обращений к оракулу Q_{U_f}

<u>Квантовые вычисления с оракулом</u> [0 0 ... Q] $C_1 \to (C_2) \to \dots \to C_t$ (query; вопрос к оракулу)

Вместо ω применяем Q_{U_φ} – квантовую версию оракула для φ; это унитарный оператор. Достаточно задать его на базисе. Распространяем по линейности на все гильб. пр-во

$Q_{U_f}: |x, y\rangle \to |x, y \oplus \varphi(x)\rangle$ – сделали ф-ию обратимой; $(Q_{U_f})^2 = I$

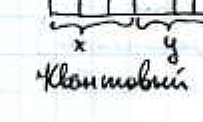
→ побитовое сложение по модулю 2



FNC-задачи хорошо распараллеливаются (FNC – решаются за полилогарифмическое время $O((\log n)^k)$ для некоторого k на PAM-машине; напр. задача о порядке перемн. матриц)

Квантовый алгоритм для решения SAT-проблемы состоит из следующих частей билета.

<u>Оператор отражения</u> I_a – унитарн. оператор зеркального отражения в $\mathcal{H}$ относительно гиперплоскости, перпендикулярной $\bar{a}$.



$I_a(\perp a) = \perp a$ – гиперплоскость остается на месте

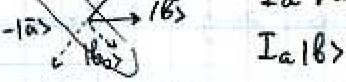
$I_a|a\rangle = -|a\rangle$

$I_a|b\rangle = \begin{cases} |b\rangle, \text{ если } \langle b, a\rangle = 0 \\ -|b\rangle, \text{ если } |b\rangle = |a\rangle \end{cases}$ остальные векторы раскладываются на сумму компонент на $|a\rangle$ и $\perp|a\rangle$, то есть:

$|b\rangle = \lambda|a\rangle + \mu|b_0\rangle$, где $\langle b_0, a\rangle = 0$; $I_a|b\rangle = -\lambda|a\rangle + \mu|b_0\rangle$

Реализуем эту операцию относительно какого-то вектора.

<u>ancilla</u> – вспомогательные ячейки на квантовой ленте, обычно добавляются в нулевом состоянии $|0\rangle|0\rangle\dots$; эти ячейки нах. в незапутанном состоянии с основной лентой.



В ходе вычислений ancilla оказывается запутанной с остальной лентой. Если в этот момент её выбросить, то кто-то может её измерить (получим смешанное сост.) – вычисление этим будет испорчено. → лишь тогда можно ее выбросить

$|X_0\rangle = |X_{\text{осн}}\rangle \otimes |X_{\text{ancilla}}\rangle$

$|X_1\rangle \neq |\tilde{X}_{\text{осн}}\rangle \otimes |\tilde{X}_{\text{ancilla}}\rangle$

$|X_1\rangle \to |X_2\rangle$: [ ] $\otimes$ [ancilla]

Процесс $|X_1\rangle \to |X_2\rangle$ называется <u>очисткой ancilla</u>

Зеркальное преобразование

$f(x_{тах}) = 1$ $x_{тах}$ - единственное решение; $|x_{тах}\rangle$ - базисный вектор.

$|\tilde{0}\rangle = |0\ldots0\rangle$ - все кубиты в 0 сост.; Применим к нему оператор Уолша-Адамара размерности 2^n: $W_n = H^{\otimes n}$; $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$: $|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
$|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

$W_n|\tilde{0}\rangle = \underbrace{(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\ldots(|0\rangle+|1\rangle)}_{n\text{ раз}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} = |\tilde{\gamma}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}|j\rangle$, где

j - посл. 0 и 1 в бинарном разложении: $|j_1\ldots j_n\rangle = |j\rangle$, где $j = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot j_{n-k+1}$.

Это был не зашумляющий оператор.

Среди этих $|j\rangle$ где-то есть $|x_{тах}\rangle$. Если сейчас его померить, вероятность $p_{тах} = \frac{1}{N}$, нам ускорения => нужно эволюционировать, чтобы нарастить амплитуду.

$|\psi\rangle = \alpha|x_{тах}\rangle + \beta\sum_{j\neq x_{тах}}|j\rangle$; в начале $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{N}}$, потом α должна расти (тогда при этом β падает).

Это наращивание амплитуды можно сделать с помощью инверсий вдоль векторов (зеркальные преобразования).

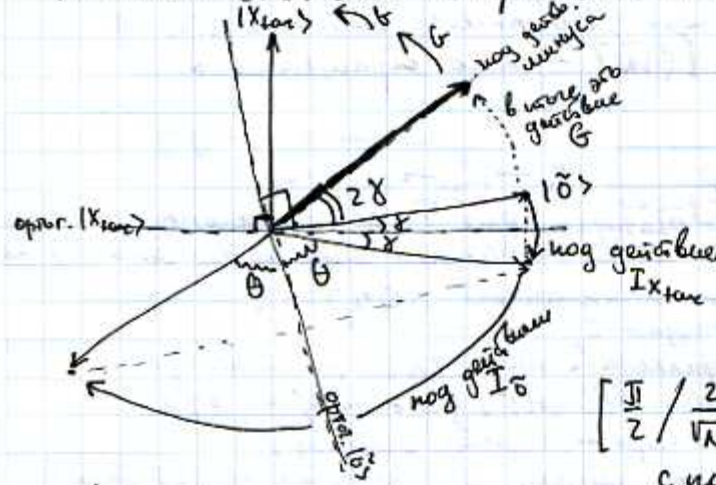
$I_{|\tilde{0}\rangle}$ и $I_{|x_{тах}\rangle}$ → это помогает реализовать оракул.

Составим из них оператор Гровера $G = -I_{\tilde{0}}\cdot I_{x_{тах}}$ → сначала делаем $I_{x_{тах}}$, потом $I_{\tilde{0}}$.

G максимально коротким путем ведет из $|\tilde{0}\rangle$ в $|x_{тах}\rangle$. $\mathcal{L} \cong \mathbb{R}^2$

$\alpha|x_{тах}\rangle + \beta\sum_{j\neq x_{тах}}|j\rangle$ - элементы пр-ва $\mathcal{L} = \mathcal{L}_R(|\tilde{0}\rangle, |x_{тах}\rangle)$ - вещ.-в. лин. оболочка. Оператор G отображает $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}$.

Значит, это преобразование действует как ортогональное преобразование плоскости (т.е. это поворот или поворот с отражением). $G|_{\mathcal{L}}$ - поворот на φ.



$|\langle x_{тах}|\tilde{0}\rangle| = \frac{1}{\sqrt{N}} = \sin\gamma$, N-большое
=> угол близок к 90°; $\gamma = \arcsin\frac{1}{\sqrt{N}}$

$\theta = \frac{\pi}{2} - 2\gamma$ => поворот не 2γ

т.е. G - поворот $\mathcal{L}$ на 2γ.

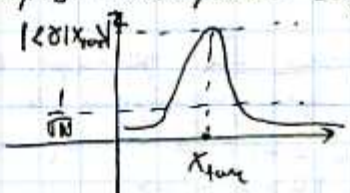
$2\cdot\gamma = \arcsin\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot 2$ Вращаем $|\tilde{0}\rangle$ максимально близко 90° $|x_{тах}\rangle$

$\arcsin\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right)$;

$\left[\frac{\pi}{2} \Big/ \frac{2}{\sqrt{N}}\right] = \left[\frac{\pi}{4}\sqrt{N}\right] = t_q$ - кол-во поворотов G (ошибка будет очень маленькой)

с помощью инверсии амплитуд сведем ее к 0.

$G^{t_q}|\tilde{0}\rangle \approx |x_{тах}\rangle$; $t_q = \left[\frac{\pi}{4}\sqrt{N}\right]$, $N = 2^n$



Строим оператор.

- $I_{x_{тах}}$ надо применить уравнение у состояния $|x,y\rangle$ тогда и только тогда, когда $x = x_{тах}$.

Считаем, что y - анцилла.

1) Добавляем $y = 0$
2) Делаем Q_{u_f} ($|x,0\rangle \to |x,f(x)\rangle$)
3) G_Z применяем к анцилле
4) повторяем пункт 2 (оракул)
5) удаляем анциллу

$G_Z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ - этот оператор меняет знак, если применяем его к $|1\rangle$.

Чтобы сократить число вызовов Оракула можно сделать anclla $= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$;

$Q_{u_f}|x_{тах}\rangle|y\rangle = |x_{тах}\rangle(f(|x_{тах}\rangle)\oplus|y\rangle) = |x_{тах}\rangle(|1\rangle\oplus(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - |1\rangle)) = -|x_{тах}\rangle|y\rangle$

$Q_{u_f}|j\rangle|y\rangle = |j\rangle|y\rangle$, $j\neq x_{тах}$; состояния анциллы при Q_{u_f} не меняются.

Таким образом, $Q_{u_f} = I_{x_{тах}}$ (+ добавление анциллы)

• Реализуем $I_{\tilde{0}}$, оператор Уолша-Адамара, до этого обозначали как W_n

Рассмотрим $W_n H = H^{\otimes n}$; $|\bar{0}\rangle = |0\ldots0\rangle$; $W_n H|\bar{0}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right)^{\otimes n}$

$H^2 = I$ (так как $H^{-1} = H$) $\Rightarrow (W_n^H)^2 = I^n$

$W_n I_{\tilde{0}} \underbrace{W_n|\tilde{0}\rangle}_{|\bar{0}\rangle} = W_n I_{\tilde{0}}|\bar{0}\rangle = -W|\bar{0}\rangle = -|\tilde{0}\rangle$ - для одного кубита

Для $W_n I_{\tilde{0}} W_n$ получаем $W_n I_{\tilde{0}} W_n|1\tilde{0}\rangle = W_n I_{\tilde{0}}|1\bar{0}\rangle = W_n|1\bar{0}\rangle = |1\tilde{0}\rangle$

Для нулевого вектора: $\widetilde{\quad}$ двойник x

Добавим ancilla: $x|00\ldots0\rangle$, куда записывается результат (для унитарности)

Добавим специальный кубит нес, который будет говорить, что встретилась единица в элементах вектора.

На каждом шаге делаем фикс. операцию V над основным кубитом, его двойником и нес. После сравнения не шаг вправо и все повторяется. После первого прохода нес говорит о том, встретилась ли хотя бы раз единица. Меняем знак. Делаем всё в обратном порядке для очистки ancilla.

x	ancilla	нес		x	anc	нес
0	0	0		0	0	0
1	0	0	→	1	0	1
0	0	1		0	0	1
1	0	1		1	1	1

на всех остальных состояниях действие этой операции доопределяется так, чтобы она была унитарно однозначной

Тогда вид будет $\underbrace{I_1^{-1}\ldots I_{n-1}^{-1} I_n^{-1}}_{\text{расширивание}}(-\mathcal{O}_2) I_n \ldots I_2 I_1$ для 0 и с добавлением для $|\tilde{0}\rangle$: т.к. $|\tilde{0}\rangle = W_n|\bar{0}\rangle$, то $I_{\tilde{0}} = W_n I_{\bar{0}} W_n \Rightarrow$ ответ получается следующий:

$$I_{\tilde{0}} = W_n I_1^{-1}\ldots I_n^{-1}(-\mathcal{O}_2) I_n \ldots I_1$$

Если решение не одно

Нам достаточно найти хотя бы одно значение $|x_{нач}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sum_{k=1}^{\ell}|x_k\rangle$

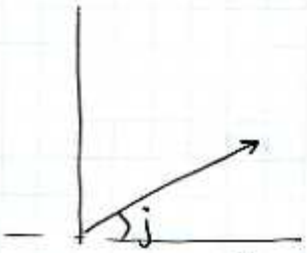
Рассмотрим действие $\mathcal{O}_{u_f}: |x,y\rangle \to |x, f(x)\oplus y\rangle$

$x = x_n$, $x \in \{x_1,\ldots,x_\ell\}$.

$\mathcal{O}_{u_f}|x\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right)_{\text{ancilla}}$ $\qquad d_f = d(x_1,\ldots,x_\ell)$

$d = d_{\mathbb{R}}(|x_{нач}\rangle, |\tilde{0}\rangle)$

$j = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\ell}{N}}\right)$ $\Rightarrow$ суть алгоритма Гровера сохранение, меняется только угол.



$t_q = \left[\frac{\pi}{2} / \frac{2\sqrt{\ell}}{\sqrt{N}}\right] = \left[\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{\ell}}\right]$ $\Rightarrow$ когда несколько решений - это хуже

Пусть $I_{нач}$ - отражение всего пр-ва относительно подпр-ва, ортогонального d_f.

В алгоритме Гровера можно использовать вместо $I_{\tilde{0}}$ произвольное состояние

8 Квантовое преобразование Фурье. Его унитарность и реализация в виде схемы квантовых гейтов. Применение преобразования Фурье. Алгоритмы Абрамси-Лойда и Залки-Вазирани.

Quantum gate array

двухъямный потенциал

NOT: $|0\rangle \to |1\rangle$ $|1\rangle \to |0\rangle$ — он через время реализуется сам.

$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$
$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
] собственные состояния для гейта Адамара

$H = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$|0\rangle = \frac{|\Phi_0\rangle + |\Phi_1\rangle}{\sqrt{2}}$

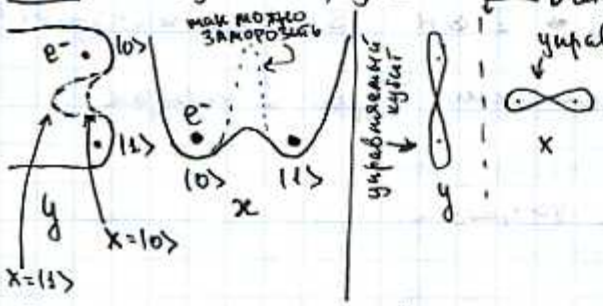
$|1\rangle = \frac{|\Phi_0\rangle - |\Phi_1\rangle}{\sqrt{2}}$

$\psi(0) = |0\rangle$; эволюция: $\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_0\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_1\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} = e^{i\varphi}|1\rangle$

Подобрать такое t, чтобы слагаемые(?) вошли в противофазу ($E_0 \neq E_1$)

$t = \frac{\hbar \cdot \pi}{E_1 - E_0}$ — такое t, время ожидания

CNOT: $|x, y\rangle \to |x, y \oplus x\rangle$



$|00\rangle \to |00\rangle$
$|01\rangle \to |01\rangle$
$|10\rangle \to |11\rangle$
$|11\rangle \to |10\rangle$

Если $x = |0\rangle$, то потенц. барьер в y выше, иначе — ниже.

Допустим, что $x = const$.

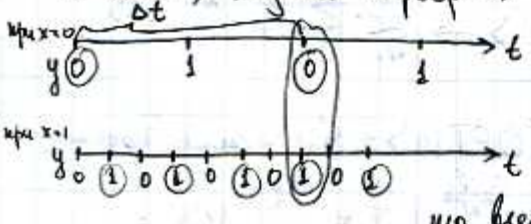
1) $x = 0$; y: $|0\rangle \to |1\rangle$; $|1\rangle \to |0\rangle$ — изменение второго кубита

$\Delta t_y^{x=0} = \frac{\pi\hbar}{\underbrace{E_1^{x=0} - E_0^{x=0}}_{\text{малое}}}$ } большое

Если барьер высокий (для y), то $E_1 - E_0$ малое, иначе — наоборот.

в $H = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ b - амплитуда прыжка

2) $x = 1$; нижний барьер $\Rightarrow E_1^{x=1} - E_0^{x=1}$ — большое, $\Rightarrow \Delta t_y^{x=1}$ — маленькое



обведенные значения — те, которые подходят.
Δt - время совпадения.
$\Delta t_y^{x=0} = \varepsilon_1$; $\Delta t_y^{x=1} = \varepsilon_2$

Если ε_1 и ε_2 несоизмеримы (одно рац., другое ирац.), то всегда есть точка с максимальным приближением.

Вообще E можно менять так, чтобы всё хорошо совпадало, но это если $x = const$. Такое ограничение — это плохо!

$|x\rangle = \lambda|0\rangle + \mu|1\rangle$ Если аккуратно поднять высоту потенц. барьера для x, то состояние замерзнет.

В итоге CNOT такой: • фиксируем x, повышая барьер • ищем Δt • возврат естественного барьера для x.

Но есть проблема декогерентности: $|\Phi_0\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ - с.в., $|\Phi_2\rangle$ - возбужденное состояние, электрон в этом состоянии пытается испустить фотон (фактор декогерентности).

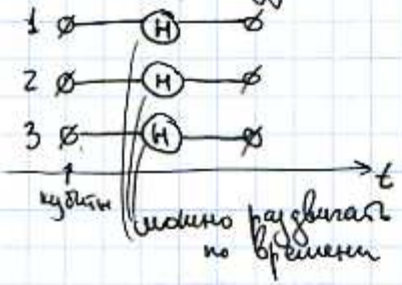
$|0\rangle$ - нет фотонов
$|1\rangle$ - есть 1 фотон
$|2\rangle$ - есть 2 фотона

NS $\begin{cases} |0\rangle \to e^{i\varphi}|0\rangle \\ |1\rangle \to e^{i\varphi}|1\rangle \\ |2\rangle \to -|2\rangle \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — это CSIGN

фаза меняется на π

Делаем преобр. Адамара над 2ым кубитом C-Sign → получаем CNOT, если над первым - то I : $I \otimes H_2 \, C\text{-}SIGN \cdot I \otimes H_2 = CNOT$

Схема, реализующая оператор Уолша - Адамара: $H^{\otimes n} = W\text{-}H$: $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



Длина провода не важна; над нашими кубитами совершаем H.

$\phi \longrightarrow \phi e^{i\varphi}$ - изменяется только фаза, она ничего не меняет → длина проводов не важна

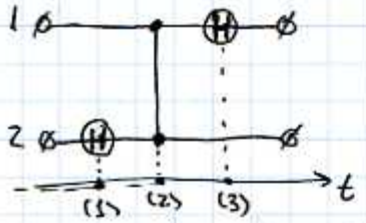
$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$ A, B - однокубитные

$W\text{-}H = (w_{ij})$ - амплитуда перехода из $|j\rangle$ в $|i\rangle$ это $-\frac{i}{\hbar} w_{ij}$, т.к. $U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} =$

$= 1 - \frac{i}{\hbar} Ht + O(t^2)$ - для маленького времени. Только (-1) в H меняет фазу $\Rightarrow w_{ij} = \frac{1}{2^{n/2}} (-1)^{i \cdot j}$ — побитовое умножение в двоичной системе

Оказывается, что это грубое приближение преобр-я Фурье.

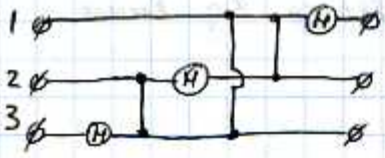
Гейт Тоффоли: $T|x, y, z\rangle = |x, y, z \oplus xy\rangle$, его можно выразить через CNOT и однокубитный гейт.



1. это C-Sign : $|x, y\rangle \to (-1)^{xy} |x, y\rangle$

(1) $I \otimes H$ (2) C-Sign • $I \otimes H$ (3) $H \otimes I \otimes$ (C-Sign $\otimes I$)

получим $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ - приближение Фурье 2 порядка



← это уже 2ой порядок точности

$R_k = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i\pi/2^{(k-1)}} \end{pmatrix}$ (k, l)

Обычное преобразование Фурье: $f(x) \to \int e^{-ipx} f(x) \frac{dx}{\sqrt{}} = \varphi(p)$

обратное преобразование: $\varphi(p) \to \int e^{+ipx} \varphi(p) \, dp = f(x)$

Если подставить дельта-ф-ию $\delta_{x_0}(x) \to e^{-ipx_0}$

Обратное QFT^{-1}: $|c\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i ac}{N}} |a\rangle$ $\quad$ QFT: $|a\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i ac}{N}} |c\rangle$

Матрица $QFT = \frac{1}{\sqrt{N}} A$ $\quad \omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & N-1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 & & \omega^{N-1} \\ 2 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & & \\ N-1 & 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & & \omega^{(N-1)^2} \end{array}$$

матрица дискретного преобр-я Фурье

$\langle b | QFT^* QFT | a \rangle = \delta_{ab}$ - симв. Кронекера

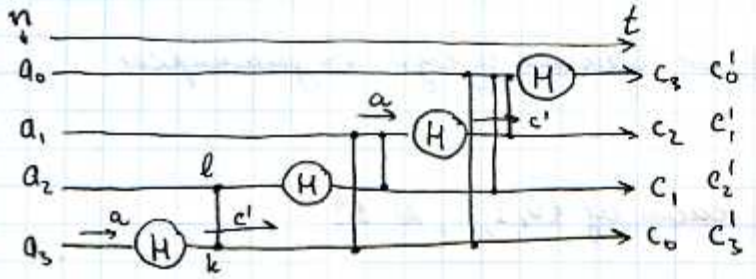
$$\frac{1}{N} \langle c' | \sum_{c'=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i bc'}{N}} \Big| \sum_{c=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i ac}{N}} |c\rangle = \frac{1}{N} \langle c' | c \rangle \sum_{c,c'=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(bc' - ac)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{c=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i c(b-a)}{N}} = \left\{ \text{сумма геометр. прогр.} \right\} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(b-a) \cdot N}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(b-a)}} = \begin{cases} 1, \text{ если } a = b \\ 0, \text{ (числитель 0)}, \text{ если } a \neq b \end{cases}$$

Реализация QFT^{-1} на квантовом компьютере - схема Шора

$a = \sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j$; $c = \sum_{j=0}^{n-1} c_j 2^j$, Зафиксируем бинарные состояния $|a\rangle$ и $|c\rangle$ и найдем амплитуду $|a\rangle \to |c\rangle$. Пусть она λ_{ca}

Должно быть: $\lambda_{ca} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i ac}{N}}$. Амплитуда меняется только после H,



$$\lambda_{ca} = |\lambda_{ca}| e^{i\varphi_{ca}}$$

$$|\lambda_{ca}| = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{2^{n/2}}, \text{ т.к. } \omega_{ij} = \frac{1}{2^{n/2}}(-1)^{ij} \quad \text{для H}$$

Осталось доказать, что $\varphi_{ca} = 2\pi ac/N$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Big|_k^l = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\pi/2^{k-l}} \end{pmatrix}$$

Введем также $c'_j = c_{n-j-1}$; $c_j = c'_{n-j-1}$. $\varphi_{ca} = \underbrace{\pi \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot c'_j}_{\text{от H}} + \underbrace{\pi \sum_{n>k>l\geq 0} \frac{1}{2^{k-l}} c'_k \cdot a_l}_{\text{от Фазовращателя}} =$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{проверим, что это} \\ \text{то, что надо} \end{array} \right\} = \pi \sum_{n>k\geq l\geq 0} c'_k \cdot a_l = \left\{ \begin{array}{l} \text{если } k<l, \text{ то} \\ \text{получится четное} \\ \text{целое число, оно не} \\ \text{влияет на фазу} \end{array} \right\} = \pi \sum_{k,l=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k-l}} c'_k a_l =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} c'_k = c_{n-k-1} \\ k' = n-k-1 \\ k = n-k'-1 \end{array} \right\} = \pi \sum_{k',l=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n-k'-1-l}} c_{k'} a_l = \pi \sum_{k',l=0}^{n-1} \frac{2^{k'+l+1}}{2^n} c_{k'} a_l = \pi \cdot 2ac/N$$

Сложность QFT равна $O(n^2)$, на классическом - $O(N^{\frac{1}{3}})$.

Приложения QFT

① Нахождение собственных чисел унитарных операторов

U задан схемой кв. гейтов; оператор условного применения: $U_{cond}|\psi, \alpha\rangle = U^\alpha|\psi\rangle|\alpha\rangle$ (1)

$|\psi\rangle|\alpha\rangle$, α - анциилла

Каждый оператор схемы U сделаем условным:

тогда наши можно обращать операторы и т. д.

Пусть теперь α содержит любое число кубитов (n): $\alpha \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $N = 2^n$. Тогда это описывается через (1).

Собств. числа U по модулю равны 1, имеют вид $e^{2\pi i \omega_k}$, $k = 0, 1, \ldots n$. $\omega_k \in [0, 1]$ - собственные частоты U.

Найдем ω_k с помощью QFT. Предположим для простоты, что все собств. частоты имеют вид $\omega_k = \frac{L_k}{N}$, $L_k \in \mathbb{N}$.

Алгоритм нахождения ω_k:

1) приготовим анциллу $|\alpha\rangle$ в состоянии $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle = |\tilde{0}\rangle$

2) возьмем $|\psi_0\rangle$ произвольно и совершим преобразование U_{cond} над $|\psi_0\rangle|\alpha\rangle$

3) совершим QFT $|\alpha\rangle$

4) измерим анциллу, в результате в анцилле лежит одно из L_k.

почему результат такой:

$|\psi_0\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} X_k |\Phi_k\rangle$, где $|\Phi_0\rangle, \ldots, |\Phi_{N-1}\rangle$ - собств. векс. U.

Пункт 2 дает: $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{j=0}^{N-1} U^j |\Phi_k\rangle|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \omega_k j} |\Phi_k\rangle|j\rangle$

Пункт 3 дает: $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \omega_k j} |\Phi_k\rangle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i j c}{N}} |c\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{c=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j \left(\frac{L_k}{N} - \frac{c}{N}\right)} |\Phi_k\rangle$

$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{c=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j \left(\frac{L_k - c}{N}\right)} |\Phi_k\rangle|c\rangle$

для фиксированного k:
если $c \neq L_k$, амплитуда = 0 (Σ геом. прогрессии)
если $c = L_k$, амплитуда = 1, т.е. в этом случае

получаем $\sum_{k=0}^{N-1} X_k |\Phi_k, L_k\rangle$

Алгоритм Абрамса - Ллойда

$QFT_d\, U_{cond}$ - преобр. Абрамса - Ллойда

$U_y|x\rangle = |x\cdot y \pmod q\rangle$ если y - простое, он взаимно однозн. => унитарен

Факторизация $q = q_1 \cdot q_2$:

$y^r \equiv 1 \pmod q$, y - случайно выбранное число из $\{0, 1, .., N-1\}$

$N = 2^n$, $2^{n-1} \le q < 2^n$.

$y^r - 1 \overset{q}{\equiv} 0$; $y^r - 1 = q\cdot s$; если r - чётное: $(y^{\frac{r}{2}} - 1)(y^{\frac{r}{2}} + 1) = q\cdot s$ =>

одна из скобок с большой вероятностью делитель q.

Задача сводится к нахождению r.

$QFT_d (U_y)_{cond} |\psi\rangle|\tilde{0}\rangle$ - найдем собств. частоты оператора, и через них - r.

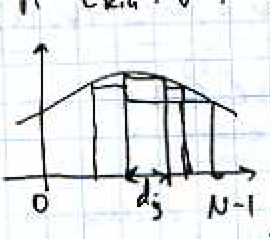
сложность n^2 (QFT), сложность N (U_{cond}) {так нет выигрыша; но можно U_{cond} реализовать эффективнее: сначала умножим на y, потом - на $y^2, \dots, y^{2^p}$ => время n

Результирующая сложность: $O(n^2(\log n)^3)$

② Алгоритм Залки - Визнера

Решение ур-я Шредингера на квантовом компьютере: $i\hbar|\dot{\psi}\rangle = H|\psi\rangle$

$H = E_{kin} + V$; $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$, $V = V(r)$ ← для 1 частицы; $p = \frac{\hbar}{i}\nabla$



Заведем систему из кубитов $1, 2, \dots, n$: $2^n = N$, и выбрано так, чтобы N точек хорошо приближали волновую ф-цию.

$\psi(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} \psi(x_j)|d_j\rangle^{\in H}$; $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$ - эволюция.

$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{kin}t - \frac{i}{\hbar}Vt} \neq e^{-\frac{i}{\hbar}E_{kin}t} e^{-\frac{i}{\hbar}Vt}$, т.к. $[E_{kin}, V] \neq 0$ (не коммутируют)

$\Big(\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}E_{kin}\Delta t}}_{II} \cdot \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta t}}_{I}\Big)^{t/\Delta t}$ с большой точностью $\underset{\text{в пределе, } \Delta t \to 0}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ ← формула Троттера (ошибка порядка Δt)

Разложим в ряд: $\Big(\big(1 - \frac{i}{\hbar}E_{kin}\Delta t + O(\Delta t^2)\big)\big(1 - \frac{i}{\hbar}V\Delta t + O(\Delta t^2)\big)\Big)^{\frac{t}{\Delta t}} =$

$= \big(1 - \frac{i}{\hbar}(E_{kin} + V)\Delta t + O(\Delta t^2)\big)^{t/\Delta t} = 1 - \frac{i}{\hbar}t(E_{kin} + V) + O(\Delta t)$

$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \big(e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t}\big)^{t/\Delta t} = \big(1 - \frac{i}{\hbar}(E_{kin} + V)\Delta t + O(\Delta t^2)\big)^{t/\Delta t}$

I. $e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta t}$, V - диагонален, имеет вид $diag\{V(x_0), \dots, V(x_{N-1})\}$; $e^{-\frac{i}{\hbar}V\Delta t} =$

$= diag\{e^{\frac{i}{\hbar}\Delta t V(x_0)}, \dots\}$ - т.е. просто поворот фазы на собств. число. $\int_R e^{-ipx} f(x)\,dx = \varphi$

II. E_{kin} - трехдиаг. оператор; $E_{kin} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$, $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$, Преобр. Фурье: $f(x) \to \int_R e^{-ipx} f(x)\,dx = \varphi$

$f'(x) \to \int_R e^{-ipx} f'(x)\,dx = \int e^{-ipx} d f(x) = f e^{-ipx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f(x)(-ip)e^{-ipx}\,dx =$ (первое слагаемое → 0)

$= ip\,\varphi(p)$; $E_{kin} \xrightarrow{QFT} \frac{\hbar^2 p^2}{2m}$; $e^{-\frac{i}{\hbar}E_{kin}\Delta t}$; реализация: $e^{-\frac{i}{\hbar}E_{kin}\Delta t} = QFT^{-1} D\, QFT$

При применении QFT, получим

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m}p_1^2\Delta t & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\hbar^2}{2m}p_{N-1}^2\Delta t \end{pmatrix}$$

$p_0 = x_0, \dots, p_{N-1} = x_{N-1}$.

Сложность алг-ма: $\frac{t}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot t^2$ (сложность > физ. времени => моделир. эволюции с квадр. замедл.)

$t\Delta t = \varepsilon$ - фикс. ошибка => $\Delta t = \frac{\varepsilon}{t}$, t - целое, кратное Δt.

Пусть есть m частиц => $3m$ координат. Преоб. Ф. к ним применяется отдельно. n кубит на 1 координату => всего $3mn$ кубит. Т.е. число кубит растёт пропорц. размеру системы, а не экспон., как на обычном компьютере.